

随机向量的相关与独立

陈鹤峰

(广东工业大学 应用数学学院, 广东 广州 510643)

摘要: 归纳了判断随机向量独立性和不相关的方法. 这些方法简化了随机向量独立与不相关的判定. 讨论了应用这些判断方法的常见误区, 并给出应用实例. 对这些方法提出了扩充方向.

关键词: 随机向量; 正态分布; 相关; 独立

中图分类号: O211

文献标志码: A

文章编号: 1007-7162(2011)02-0066-03

随机向量(本文中的随机向量也指随机变量)的相关性与独立性是学习概率论的难点. 数理统计中, 构造统计量(例如 $\chi^2(n)$ 、 $t(n)$ 、 $F(m, n)$ 分布的统计量)时经常需要判断随机向量的独立性. 目前国内通用的教材^[1-3]中仅仅给出随机向量相关与独立的定义. 仅仅用教材中的定义去判断随机向量的独立性是一件比较困难的工作. 因而在教学和学习的过程中易忽略甚至弄错随机向量特别是正态随机向量独立性与相关性的关系. 文献^[4]中给出了随机向量独立的判别条件, 使用了扩张定理, 读者难于理解. 文献^[5]证明随机变量独立性时需要构造正交矩阵, 读者需具备较好的矩阵代数知识. 独立的或者不相关的随机向量具有较多优良的性质, 仅仅凭借其定义和直观性来判断独立与不相关是远远不够的. 为了让判别、判断随机向量独立性工作变得简单, 本文拟根据随机向量独立性和不相关的定义和性质, 总结出3个实用方法. 应用这些方法能容易地解决一类判断随机向量相关性和独立性的问题.

1 判断随机向量独立性的方法

方法1 设随机向量族 $\{X_1^1, X_1^2, \dots, X_1^{n_1}, X_2^1, X_2^2, \dots, X_2^{n_2}, \dots, X_m^1, X_m^2, \dots, X_m^{n_m}\}$ ($n_1, \dots, n_m, m \in \mathbb{N}$) 相互独立, 若将该随机向量族分成一些不相交的有限子集 $X_1 = \{X_1^1, X_1^2, \dots, X_1^{n_1}\}$, $X_2 = \{X_2^1, X_2^2, \dots, X_2^{n_2}\}$, $X_m = \{X_m^1, X_m^2, \dots, X_m^{n_m}\}$. 则随机向量族 $\{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ 仍然独立.

方法2 随机向量 $X_1 = \{X_1^1, X_1^2, \dots, X_1^{n_1}\}$, $X_2 = \{X_2^1, X_2^2, \dots, X_2^{n_2}\}$, $X_m = \{X_m^1, X_m^2, \dots, X_m^{n_m}\}$ 相互独立, 并且各子集内各分量之间也相互独立, 则随机向量族 $\{X_1^1, X_1^2, \dots, X_1^{n_1}, X_2^1, X_2^2, \dots, X_2^{n_2}, \dots, X_m^1, X_m^2, \dots, X_m^{n_m}\}$ 相互

独立.

方法1、方法2均可用联合分布函数(或特征函数)等于其各个边际分布函数(或边际特征函数)之积来证明^[6].

方法3 随机向量族 $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 相互独立, $\{f_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ 为 Borel 可测向量函数, 则 $\{Z_i = f_i(X_i) (i = 1, 2, \dots, n)\}$ 也相互独立^[6].

2 常见误区

误区1 各个分量均为正态分布的随机向量不相关, 则它们独立.(注: 该命题是错误的)

众所周知, 对于多维正态分布, 其各个分量不相关与独立是等价的. 但对于边缘分布均为正态分布的随机向量, 即使它们不相关, 但它们联合起来不一定是多维正态分布, 从而它们不一定独立.

例1 设二元随机向量 (ξ, η) 的联合密度函数为

$$p(x, y) = \varphi(x) \varphi(y) + \frac{1}{2\pi} e^{-\pi^2} g(x) g(y), \\ -\infty < x, y < +\infty$$

$$\text{其中 } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty < x < +\infty$$

$$g(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| \leq \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases}$$

易证, $p(x, y) \geq 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx dy = 1$, 故 $p(x, y)$ 是密度函数. 而且协方差 $\text{Cov}(\xi, \eta) = 0$, 即 ξ, η 不相关. ξ, η 的边际密度分别为 $\varphi(x), \varphi(y)$. 显然, ξ, η 分别服从一维标准正态分布. 显然 $p(x, y) \neq \varphi(x) \cdot$

收稿日期: 2010-12-27

基金项目: 广东工业大学青年基金资助项目(072040)

作者简介: 陈鹤峰(1973-), 男, 讲师, 硕士, 主要研究方向为数理统计、图像处理、算法设计与分析

$\varphi(y) (a.e.)$. 所以 ξ, η 不独立.

误区2 3个或者3个以上的随机向量两两独立一定相互独立. (注: 该命题是错误的)

3个或者3个以上的随机向量相互独立一定两两独立. 但其逆命题不成立.

例2 设三元随机向量 (ξ, η, ζ) 的联合密度函数为

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} (1 + \cos x_1 \cos x_2 \cos x_3) / 8\pi^3, & 0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 2\pi, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

容易证明 ξ, η, ζ 两两独立, 但不相互独立.

误区3 ξ 与 η 独立, ξ 与 ζ 独立, 则 ξ 与 (η, ζ) 独立. (注: 该命题是错误的)

可以利用例2证明, 此处略.

3 向量独立性判断方法的应用

例3 设 $(X_1, X_2, \dots, X_{n_1})$ 与 $(Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2})$ 分别来自同方差正态总体 $N(u_1, \sigma^2)$, $N(u_2, \sigma^2)$ 的样本, 且这两个样本相互独立. 设 $\bar{X}, \bar{Y}$ 分别是样本均值, S_1^2, S_2^2 是样本方差. 则有

$$\frac{\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} (\bar{X} - \bar{Y}) - (u_1 - u_2)}{\sqrt{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}} \sim t(n_1 + n_2 - 2) \quad (\text{见文献 [1]})$$

说明: 本题的难点在于证明因子 $\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (u_1 - u_2)}{\sqrt{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}}$ 的分子分母的独立性. 文献 [5]

中采用正交变换, 过程比较繁琐. 可以采用如下简单的方法:

$(X_1, X_2, \dots, X_{n_1}), (Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2})$ 相互独立, 根据正态总体的样本均值与样本方差独立^[6], $(\bar{X}, \bar{Y}, S_1^2, S_2^2)$ 相互独立. 由方法1, $(\bar{X}, \bar{Y}), (S_1^2, S_2^2)$ 两个二维向量独立. 由方法3, $(\bar{X} - \bar{Y}) - (u_1 - u_2), \sqrt{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}$ 相互独立.

例4 设 $(X_1, X_2, \dots, X_r, X_{r+1}, \dots, X_n)$ 来自正态总体的简单随机样本, $\bar{X}$ 为 $(X_1, X_2, \dots, X_r)$ 的均值, S^2 为 $(X_1, X_2, \dots, X_r)$ 的方差. $\theta(\bar{X}, X_{r+1}, \dots, X_n)$ 为任一统计量, 求证: $\theta(\bar{X}, X_{r+1}, \dots, X_n)$ 与 S^2 独立.

证明 以下分3步来证明,

(1) $X_1, X_2, \dots, X_r, X_{r+1}, \dots, X_n$ 相互独立, 由方法1, $(X_1, X_2, \dots, X_r), (X_{r+1}, \dots, X_n)$ 相互独立.

(2) 由方法3, S^2 与 $(X_{r+1}, \dots, X_n)$ 独立, $\bar{X}$ 与 $(X_{r+1}, \dots, X_n)$ 独立; 根据正态总体的样本均值与样本方差独立^[6], $\bar{X}, S^2$ 相互独立; 故 $S^2, \bar{X}, X_{r+1}, \dots, X_n$ 相互独立

(注: 此处出现了误区2).

应将(2)替换为以下证明, $X_1, X_2, \dots, X_r, X_{r+1}, \dots, X_n$ 相互独立, 由方法1, $(X_1, X_2, \dots, X_r), (X_{r+1}, \dots, X_n)$ 相互独立. 由方法3, $(X_{r+1}, \dots, X_n)$ 与 $(\bar{X}, S^2)$ 独立; 根据正态总体的样本均值与样本方差独立^[6], $\bar{X}, S^2$ 相互独立; 由方法2, $S^2, \bar{X}, X_{r+1}, \dots, X_n$ 相互独立.

(3) 由方法1, $(\bar{X}, X_{r+1}, \dots, X_n)$ 与 S^2 独立, 由方法3, $\theta(\bar{X}, X_{r+1}, \dots, X_n)$ 与 S^2 独立.

注: 以 $\theta(\bar{X}, X_{r+1}, \dots, X_n)$ 作分子, S^2 做分母, 可以构造多种统计量如: T 分布, F 分布.

例5 设总体 $X \sim N(u, \sigma^2)$, X_1, X_2 各为 X 的一个简单随机样本, 求证 $\frac{(X_1 + X_2)^2}{(X_1 - X_2)^2} \sim F(1, 1)$ ^[10].

说明: 本题的参考答案^[6]没有证明分子与分母的相互独立性. 常见如下证法:

由于 X_1, X_2 独立, 由定理1, $X_1 + X_2 \sim N(2u, 2\sigma^2)$, $X_1 - X_2 \sim N(0, 2\sigma^2)$, 计算可知 $\text{Cov}(X_1 + X_2, X_1 - X_2) = 0$, 故 $(X_1 + X_2, X_1 - X_2)$ 相互独立.

其实, 这种证明方法出现了误区1, 虽然 $X_1 + X_2 \sim N(2u, 2\sigma^2)$, $X_1 - X_2 \sim N(0, 2\sigma^2)$, $(X_1 + X_2, X_1 - X_2)$ 不一定服从二维正态分布. 即使 $\text{Cov}(X_1 + X_2, X_1 - X_2) = 0$, $X_1 + X_2, X_1 - X_2$ 也不一定独立.

正确的证法是: 由于 X_1, X_2 独立, 故 (X_1, X_2) 为二维正态分布, 由多维正态分布的线性变换仍然为正态分布, 故 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ 服从二维正态分布. 又

$\text{Cov}(X_1 + X_2, X_1 - X_2) = 0$, 由正态分布的不相关与独立等价, $(X_1 + X_2, X_1 - X_2)$ 相互独立.

4 结束语

数理统计中, 由正态分布总体构造新的统计量时判断独立性是一项不可缺少的步骤. 本文中归纳的判断随机向量独立性的方法, 成为一个有用的工具, 容易理解, 比较实用. 需要注意的是上述方法的适用条件. 当然, 随着条件的增加, 可以得出更多的新方法, 会使随机向量独立性判断更加简便. 例如: 对于正态随机向量, 增加向量的各个分量同方差, 限定变换为行正交线性变换, 可以得出变换后的随机向量保持原随机向量的独立性与不相关性^[7-9]. 从而直接得到例5中的 $(X_1 + X_2, X_1 - X_2)$ 相互独立.

参考文献:

- [1] 郝志峰, 谢国瑞, 汪国强. 概率论与数理统计 [M]. 修订版. 北京: 高等教育出版社, 2002.

- [2] 复旦大学. 概率论与数理统计(第1册) [M]. 北京: 人民教育出版社, 1979: 180.
- [3] 盛骤, 谢式千, 潘承毅. 概率论与数理统计. 北京: 高等教育出版社, 1989.
- [4] 严士健, 王隽骧, 刘秀芳. 概率论基础 [M]. 北京: 科学出版社, 1982.
- [5] 梁之舜, 邓集贤, 杨维权. 概率论与数理统计 [M]. 2版. 北京: 高等教育出版社, 1988: 264.
- [6] 安玉伟, 朱捷, 王佳秋. 概率论与数理统计答案 [M]. 哈尔滨工业大学出版社, 2009.
- [7] 熊德之. n 维正态各分量的线性组合服从正态分布的一个证明 [J]. 武汉工程大学学报, 2010(3): 111-112.
- [8] Assem S Deif. Advanced Matrix Theory for Scientists and Engineers [M]. Tunbridge Wells & London: Abacus Press, 1982: 28-30.
- [9] 陈永义, 王炳章. 随机向量的函数独立性的一个问题 [J]. 工科数学, 2000, 16(2): 113-116.

Un-correlativity and Independency of Normal Random Vectors

Chen He-feng

(Faculty of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510643, China)

Abstract: It summarizes the methods of determining independence or uncorrelated random vectors. It is important to avoid judging errors while applying these methods. Some examples were given based on these methods. The expansion of these methods was proposed.

Key words: random vectors; normal distribution; un-correlativity; independency

(上接第 65 页)

The Construction and Solution of Error Matrix Equation Based on Increasing Transformation of Characteristics

Min Xi-lin, Guo Kai-zhong

(School of Management, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510520, China)

Abstract: Increasing transformation matrix of the error matrix equation $\mathbf{XA}' = \mathbf{B}$ is defined. Based on increasing transformation of characteristics, the method of solving the problem, the existence and form of the solution for this type of equations have been presented. This research provides a research method to find out the rules of error-eliminating.

Key words: error matrix equation; increasing transformation of characteristics; construction and solution of matrix equation